Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 6 im Sommersemester 2021 (am 21.05.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
WS 20.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Wintersemester 2020.
SS 21.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Sommersemester 2021.
y.z	verweist auf Aussage y.z des aktuellen Abschnitts der aktuellen Vorlesung

Wir werden die Zitate des ersten Typs bevorzugt verwenden und die Verweise der anderen Type nur für erst vor kurzem oder häufig verwendete Ergebnisse oder Definition zusätzlich angeben.

14 Kommutative lineare algebraische Gruppen

14.2 Diagonalisierbare Gruppen und Tori

14.2.5 Die Gruppen-Algebra einer endlich erzeugten abelschen Gruppe

Sei M eine endlich erzeugte abelsche Gruppe (und k wie immer ein algebraisch abgeschlossener Körper). Die <u>Gruppen-Algebra</u> von M über k ist der k-Vektorraum

$$k[M] := \sum_{m\in M} k\bullet e(m)$$

mit der Vektorraum-Basis $\{e(m)\}_{m\in M}$ versehen mit der über k bilinearen Multiplikation

$$k[M]\times k[M] \longrightarrow k[M] \text{ mit } e(m')\bullet e(m'') := e(m'+m'') \text{ für } m', m'' \in M.$$

Man beachte, diese Multiplikation ist assoziativ und kommutativ, weil die Addition in M es ist.

Bemerkungen

(i) Für je zwei endlich erzeugte abelsche Gruppen M', M" besteht ein natürlicher Isomorphismus von k-Algebren

$$k[M']\otimes_k k[M''] \xrightarrow{\cong} k[M'\oplus M''],\ e(m')\otimes e(m'') \mapsto e((m',m'')).$$

(ii) Für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe definieren wir k-lineare Abbildungen

$$\Delta = \Delta_M: k[M] \longrightarrow k[M]\otimes_k k[M],\ e(m) \mapsto e(m)\otimes e(m),$$

$$\iota = \iota_M: k[M] \longrightarrow k[M],\ e(m) \mapsto e(-m),$$

$$e = e_M: k[M] \longrightarrow k,\ e(m) \mapsto 1.$$

Es sind sogar Homomorphismen von k-Algebren.

(iii) Die k-Algebra-Homomorphismen von (ii) sind mit dem in (i) beschriebenen Isomorphismus verträglich.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Die Abbildung

$$\varphi: k[M'] \times k[M''] \longrightarrow k[M'\oplus M''],$$

$$\Big(\sum_{m'\in M'} c_{m'}\cdot e(m'),\ \sum_{m''\in M''} d_{m''}\cdot e(m'')\Big) \mapsto \sum_{(m',m'')\in M'\oplus M''} c_{m'}\cdot d_{m''}\cdot e((m',m''))$$

ist wohldefiniert und bilinear über k. Sie faktorisiert sich deshalb eindeutig über das Tensorprodukt $k[M']\otimes_k k[M'']$, d.h. es gibt genau eine k-lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi}: k[M']\otimes_k k[M''] \longrightarrow k[M'\oplus M''],\ e(m')\otimes e(m'') \mapsto e((m',m''))$$

für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[M']\times k[M'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\otimes"'] & k[M'\oplus M''] \\ k[M']\otimes_k k[M''] \arrow[ur, leftarrow, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Dabei bezeichne die linke vertikale Abbildung die natürliche Abbildunge auf das Tensorprodukt $(a,b) \mapsto a\otimes b$. An der Abbildungsvorschrift liest man ab, daß $\tilde{\varphi}$ ein Homomorphismus von k-Algebren ist: für $x',y' \in M'$ und $x'',y''\in M''$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}((e(x')\otimes e(x''))\cdot(e(y')\otimes e(y''))) &= \tilde{\varphi}((e(x')\cdot e(y'))\otimes(e(x'')\cdot e(y''))) \\
&= \tilde{\varphi}(e(x'+y')\otimes e(x''+y'')) \\
&= e((x'+y',x''+y'')) \\
&= e((x',x'')+(y',y'')) \\
&= e((x',x''))\cdot e((y',y'')) \\
&= \tilde{\varphi}(e(x')\otimes e(x''))\cdot \tilde{\varphi}(e(y')\otimes e(y''))
\end{aligned}$$

d.h. $\tilde{\varphi}$ ist ein k-linearer Ring-Homomorphismus, also ein k-Algebra-Homomorphismus. Die k-Vektorraumbasis der $e(m')\otimes e(m'')$ von $k[M']\otimes_k k[M'']$ wird dabei in die k-Vektorraumbasis der $e((m', m''))$ von $k[M'\oplus M'']$ abgebildet, d.h. $\tilde{\varphi}$ ist ein k-linearer Isomorphismus. Insbesondere ist $\tilde{\varphi}$ bijektiv, also ein Isomorphismus von k-Algebren.

Zu (ii) Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basiselemente eindeutig festgelegt, wobei diese Bilder beliebig vorgegeben werden können. Die Abbildungen Δ, ι und e sind deshalb wohldefiniert und k-linear. Es ist noch ihre Multiplikativität zu beweisen. Weil die Abbildungen k-linear sind (und die Multiplikation von k[M] bilinear über k), reicht es zu zeigen, ein Produkt von Basiselementen wird in das Produkt von deren Bildern überführt.

Für $m', m'' \in M$ gilt

$$\begin{aligned}
\Delta(e(m')\cdot e(m'')) &= \Delta(e(m'+m'')) && \text{(Definition der Muliplikation in k[M])} \\
&= e(m'+m'')\otimes e(m'+m'') && \text{(Definition von } \Delta\text{)} \\
&= (e(m')\cdot e(m''))\otimes(e(m')\cdot e(m'')) && \text{(Definition der Muliplikation in k[M])} \\
&= (e(m')\otimes e(m'))\cdot(e(m'')\otimes e(m'')) && \text{(Definition der Muliplikation des Tensorprodukts)} \\
&= \Delta(e(m'))\cdot\Delta(e(m'')) && \text{(Definition von } \Delta\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iota(e(m')\cdot e(m'')) &= \iota(e(m'+m'')) && \text{(Definition der Muliplikation in k[M])} \\
&= e(-(m'+m'')) && \text{(Definition von } \iota\text{)} \\
&= e((-m')+(-m'')) && \\
&= e(-m')\cdot e(-m'') && \text{(Definition der Muliplikation in k[M])} \\
&= \iota(e(m'))\cdot\iota(e(m'')) && \text{(Definition von } \iota\text{)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e_M(e(m')\bullet e(m'')) &= e_M(e(m'+m'')) \\ &= 1 \\ &= 1\bullet 1 \\ &= e_M(e(m'))\bullet e_M(e(m'')). \end{aligned}$$

<u>Zu (iii)</u>. Δ <u>ist verträglich mit dem Isomorphismus von</u> (i), d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[M']\otimes_k k[M''] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Delta_{M'}\otimes\Delta_{M''}"'] & k[M'\oplus M''] \arrow[d, "\Delta_{M'\oplus M''}"] \\ (k[M']\otimes_k k[M'])\otimes_k(k[M'']\otimes_k k[M'']) \arrow[r, "(\alpha\otimes\alpha)\circ\tau"] & k[M'\oplus M'']\otimes_k k[M'\oplus M''] \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, wobei α den Isomorphismus von (i) bezeichnen soll und τ den Isomorphismus

$$\tau:(k[M']\otimes_k k[M'])\otimes_k(k[M'']\otimes_k k[M'']) \xrightarrow{\cong} (k[M']\otimes_k k[M''])\otimes_k(k[M']\otimes_k k[M'']),$$

welcher die beiden inneren Tensorfaktoren vertauscht.

Weil alle beteiligten Abbildungen k-linear sind, reicht es, die Kommutativität für die Basis-Elemente von $k[M']\otimes_k k[M'']$ zu überprüfen. Für $m'\in M'$ und $m''\in M''$ gilt

$$\begin{aligned} (\Delta_{M'\oplus M''}\circ\alpha)(e(m')\otimes e(m'')) &= \Delta_{M'\oplus M''}(e((m',m''))) && \text{(Definition von } \alpha) \\ &= e((m',m''))\otimes e((m',m'')) && \text{(Definiton von } \Delta_{M'\oplus M''}) \\ &= \alpha(e(m')\otimes e(m''))\otimes\alpha(e(m')\otimes e(m'')) && \text{(Definition von } \alpha) \\ &= (\alpha\otimes\alpha)(e(m')\otimes e(m'')\otimes e(m')\otimes e(m'')) \\ &= ((\alpha\otimes\alpha)\circ\tau)\, (e(m')\otimes e(m')\otimes e(m'')\otimes e(m'')) && \text{(Definition von } \tau) \\ &= ((\alpha\otimes\alpha)\circ\tau)\, (\Delta_{M'}(e(m'))\otimes\Delta_{M''}(e(m''))) && \text{(Definition von } \Delta_{M'} \text{ und } \Delta_{M''}) \\ &= ((\alpha\otimes\alpha)\circ\tau\circ(\Delta_{M'}\otimes\Delta_{M''})(e(m')\otimes e(m'')) \end{aligned}$$

Da dies für alle $m'\in M'$ und alle $m''\in M''$ gilt, ist das Diagramm kommutativ.

ι <u>ist verträglich mit dem Isomorphismus von</u> (i), d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[M']\otimes_k k[M''] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\iota_{M'}\otimes\iota_{M''}"] & k[M'\oplus M''] \arrow[d, "\iota_{M'\oplus M''}"'] \\ k[M']\otimes_k k[M''] \arrow[r, "\alpha"] & k[M'\oplus M''] \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Weil alle beteiligten Abbildungen k-linear sind, reicht es, die Kommutativität für die Basis-Elemente von $k[M']\otimes_k k[M'']$ zu überprüfen. Für $m'\in M'$ und $m''\in M''$ gilt

$$\begin{aligned} (\alpha\circ(\iota_{M'}\otimes\iota_{M''}))(e(m')\otimes e(m'')) &= \alpha(e(-m')\otimes e(-m'')) && \text{(Definition von } \iota_{M'} \text{ und } \iota_{M''}) \\ &= e((-m',-m'')) && \text{(Definition von } \alpha) \\ &= e(-(m',m'')) \\ &= \iota_{M'\oplus M''}(e((m',m''))) && \text{(Definition von } \iota_{M'\oplus M''}) \end{aligned}$$

$= \iota_{M'\oplus M''}(\alpha(e((m')\otimes e(m''))$ (Definition von α)

d.h. auch das zweite Diagramm ist kommutativ.
e <u>ist verträglich mit dem Isomorphismus von</u> (i), d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[M']\otimes_k k[M''] & \xrightarrow{\alpha} & k[M'\oplus M''] \\ {}^{e_{M'}\otimes e_{M''}}\downarrow & & \downarrow{}^{e_{M'\oplus M''}} \\ k\otimes_k k & = & k \end{array}$$

ist kommutativ, wenn wir k mit $k\otimes_k k$ identifzieren vermittels der Abbildung

$$k\otimes_k k \longrightarrow k,\ c\otimes d \mapsto c\bullet d.$$

Weil alle beteiligten Abbildungen k-linear sind, reicht es, die Kommutativität für die Basis-Elemente von $k[M']\otimes_k k[M'']$ zu überprüfen. Für $m'\in M'$ und $m''\in M''$ gilt

$e_{M'\oplus M''}(\alpha(e(m')\otimes e(m''))) = e_{M'\oplus M''}(e((m',m''))$ (Definition von α)
$= 1$ (Definition von $e_{M'\oplus M''}$)
$= 1\otimes 1$ (wir identifizieren $k\otimes_k k$ mit k)
$= e_{M'}(e(m'))\otimes e_{M''}(e(m''))$ (Definition von $e_{M'}$ und $e_{M''}$)
$= (e_{M'}\otimes e_{M''})(e(m')\otimes e(m''))$

Also ist auch das dritte Diagramm kommutativ.
QED.

14.2.6 Proposition: Rekonstruktion der diagonlisierbaren Gruppen aus deren Charaktergruppe

Seien p die Charakteristik des (algebraisch abgeschlossenen) Körpers k und M eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ohne p-Torsion, falls $p \neq 0$ ist. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) k[M] ist eine endlich erzeugte und reduzierte k-Algebra. Es gibt eine diagonalisierbare lineare algebraische Gruppe $\mathcal{G}(M)$ mit
$$k[\mathcal{G}(M)] = k[M],$$
wobei die Komultiplikation, der Antipode und die Auswertung im neutralen Element gerade die in 2.5 (ii) bzw. 3.2.5 (ii) beschriebenen Abbildungen
$$\Delta = \Delta_{M'},\ \iota = \iota_M \text{ bzw. } e = e_M$$
sind.

(ii) Es gibt einen natürlichen Isomorphismus abelscher Gruppen
$$M \xrightarrow{\cong} \mathbf{X}^*(\mathcal{G}(M)),\ m \mapsto (x \mapsto e(m)(x))$$

(iii) Für jede diagonalisierbare lineare algebraische Gruppe besteht eine natürliche Isomorphie $\mathcal{G}(\mathbf{X}^*(G)) \cong G$ von algebraischen Gruppen.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. 1. <u>Schritt</u>. Reduktion auf den Fall M zyklisch.
Als endlich erzeugte abelsche Gruppe ist M eine endliche direkte Summe von zyklischen Gruppen. Es reicht also zu zeigen, Aussage (i) gilt für
$$M = M'\oplus M'',$$
falls sie für M' und M'' gilt.
Sei also
$$k[M'] = k[\mathcal{G}(M')] \text{ mit } k[\mathcal{G}(M'')]$$
mit diagonalisierbaren Gruppen
$$\mathcal{G}' := \mathcal{G}(M') \text{ und } \mathcal{G}'' := \mathcal{G}(M''),$$

deren Komulitplikationen, Antipoden und Auswertungen im neutralen Element die beschriebene Gestalt haben.
Dann ist

$$\mathcal{G} := \mathcal{G}'\times\mathcal{G}''$$

eine diagonalisierbare Gruppe mit dem Koordinatenring

$$k[\mathcal{G}] = k[\mathcal{G}(M')]\otimes_k k[\mathcal{G}(M'')] = k[M']\otimes_k k[M''] = k[M'\oplus M''].$$

Nach 2.5 (iii) bzw. 3.2.5 hat mit $\mathcal{G}'$ und $\mathcal{G}''$ auch $\mathcal{G}$ eine Komultiplikation, einen Antipoden und eine Auswertung im neutralen Element der behaupteten Gestalt.
2. Schritt. Der Fall $M \cong \mathbb{Z}$. einer unendlichen zyklischen Gruppe.
Es gilt

$$k[M] \cong k[\mathbb{Z}] \overset{1}{\cong} k[x, x^{-1}] \quad (\subseteq k(x))$$

mit einer Unbestimmten x, d.h. $\mathcal{G}(M)$ ist bis auf Isomorphie gerade die multiplikative Gruppe

$$\mathcal{G}(M) = \mathbf{G}_m$$

(vgl. 2.1.4 Beispiel 2). Man beachte, die Komultiplikation, der Antipode und die Auswertung im neutralen Element von $\mathbf{G}_m$ haben die behauptete Gestalt.
4. Schritt. Der Fall $M \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ einer endlichen zyklischen Gruppe.
Weil M im Fall $p \neq 0$ keine p-Torsion haben soll, ist n in diesem Fall teilerfremd zu p.
Sei

$$\mathcal{G} := \{\xi \in \mathbf{G}_m \mid \xi^n = 1\} = \{\xi \in k^* \mid \xi^n = 1\}$$

die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Als endliche Teilmenge von $\mathbf{G}_m$ ist $\mathcal{G}$ abgeschlossen, also eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{G}_m$ (und damit diagonalisierbar).
Weil n im Fall $p \neq 0$ teilerfremd zu p ist, hat das Polynom

$$x^n - 1$$

kein mehrfachen Nullstellen, d.h. es ist

$$x^n - 1 = (x - \alpha_1)\bullet...\bullet(x - \alpha_n) \text{ mit } \alpha_1,..., \alpha_n \in k \text{ paarweise verschieden.}$$

Die Faktoren $x - \alpha_i$ sind also paarweise teilerfremd. Nach dem Chinesichen Restesatz ist

$$k[x]/(x^n-1) \cong k[x]/(x- \alpha_1) \times ... \times k[x]/(x - \alpha_n) \cong k \times ... \times k.$$

Die Multiplikation rechts ist dabei koordinatenweise definiert. Deshalb ist der Ring reduziert, und damit der Koordinatenring von $\mathcal{G}$,

$$k[\mathcal{G}] = k[x]/(x^n-1) = k\bullet 1 + k\bullet\alpha + ... + k\bullet\alpha^{n-1}. \tag{1}$$

Dabei sei $\alpha := x|_{\mathcal{G}}$ die Einschränkung des Charakters $x: \mathbf{G}_m \longrightarrow k^*, t \mapsto t$. Als Einschränkung eines Charakters von $\mathbf{G}_m$ ist α ein Charakter von $\mathcal{G}$. Die Potenzen von α sind ebenfalls Charaktere von $\mathcal{G}$. Mit (1) gilt

$$X^*(\mathcal{G}) = \{1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}\},$$

denn jeder Charakter von $\mathcal{G}$ liegt in $k[\mathcal{G}]$ und nach dem Satz von Artin sind verschiedene Charaktere linear unabhängig. Insbesonder ist $X^*(\mathcal{G})$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung n,

$$X^*(\mathcal{G}) \cong M,$$

und der Koordinatenring von $\mathcal{G}$ ist isomorph zur Gruppen-Algebra von M,

---

[1] $\mathbb{Z}$ ist isomorph zur multiplikativen Gruppe der Potenzen einer Unbestimmten mit ganzzahligen Exponenten.

$$k[\mathcal{G}] = k[X^*(\mathcal{G})] = k[M].$$

Weil die natürliche Einbettung von $\mathcal{G}(M)$ in $\mathbf{G}_m$ ein Homomorphismus von linearen algebraischen Gruppen ist, bilden die Komultiplikationen, der Antipode und die Auswertungen im neutralen Element von $\mathcal{G}(M)$ und $\mathbf{G}_m$ kommutative Vierecke.

$$\begin{array}{ccc} k[x,x^{-1}] & \xrightarrow{\Delta} & k[x,x^{-1}]\otimes k[x,x^{-1}] \\ \rho\downarrow & & \downarrow\rho\otimes\rho \\ k[M] & \xrightarrow{\Delta_M} & k[M]\otimes k[M] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} k[x,x^{-1}] & \xrightarrow{\iota} & k[x,x^{-1}] \\ \rho\downarrow & & \downarrow\rho \\ k[M] & \xrightarrow{\iota_M} & k[M] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} k[x,x^{-1}] & \xrightarrow{e} & k \\ \rho\downarrow & & \| \\ k[M] & \xrightarrow{e_M} & k \end{array}$$

Dabei sei ρ: $k[\mathbf{G}_m] \twoheadrightarrow k[\mathcal{G}(M)]$ die Einschränkung auf die abgeschlossene Untergruppe. Auf Grund dieser kommutativen Vierecke haben Komultiplikation, Antipode und Auswertung im neutralen Element für $\mathcal{G}(M)$ die behauptete Gestalt (weil sie diese Gestalt für $\mathbf{G}_m$ auf Grund des dritten Schritts haben). Genauer, es gilt

$$\begin{array}{lll}
\Delta_M(\rho(x)^n) & = \Delta_M(\rho(x^n)) & (\rho \text{ ist Algebra-Homomorphismus}) \\
 & = (\rho\otimes\rho)(\Delta(x^n)) & (\text{Kommutativität des ersten Diagramms}) \\
 & = (\rho\otimes\rho)(x^n\otimes x^n)) & (\text{Definition von } \Delta) \\
 & = \rho(x^n)\otimes\rho(x^n) & \\
 & = \rho(x)^n\otimes\rho(x)^n & (\rho \text{ ist Algebra -Homomorphismus}) \\
\iota_M(\rho(x)^n) & = \iota_M(\rho(x^n)) & (\rho \text{ ist Algebra -Homomorphismus}) \\
 & = \rho(\iota(x^n)) & (\text{Kommutativität des zweiten Diagramms}) \\
 & = \rho(x^{-n}) & (\text{Definition von } \iota) \\
 & = \rho(x)^{-n} & (\rho \text{ ist Algebra -Homomorphismus}) \\
e_M(\rho(x)^n) & = e_M(\rho(x^n)) & (\rho \text{ ist Algebra -Homomorphismus}) \\
 & = \rho(e(x^n)) & (\text{Kommutativität des dritten Diagramms}) \\
 & = \rho(1) & (\text{Definition von } e) \\
 & = 1 & (\rho \text{ ist Algebra -Homomorphismus})
\end{array}$$

<u>Zu (ii)</u>. Wegen $k[\mathcal{G}(M)] = k[M]$ ist für jedes $m\in M$ das Elemente $e(m)\in k[M]$ eine reguläre Funktion

$$e(m)\colon \mathcal{G}(M) \longrightarrow k.$$

Für $x,y \in \mathcal{G}(M)$ ist

$$\begin{array}{lll}
e(m)(x\bullet y) & = (e(m)\circ\mu)(x,y) & (\mu \text{ sei die Multiplikation von } \mathcal{G}(M)) \\
 & = \mu^*(e(m))(x,y) & \\
 & = \Delta_M(e(m))(x,y) & (\Delta_M \text{ ist die Komultiplikation}) \\
 & = (e(m)\otimes e(m))(x,y) & (\text{Definition der Komultiplikation } \Delta_M) \\
 & = e(m)(x)\bullet e(m)(y), &
\end{array}$$

d.h. $e(m)$ ist ein Charakter von $\mathcal{G}(M)$ und die Abbildung

$$\varphi\colon M \longrightarrow \mathbf{X}^*(\mathcal{G}(M)),\ m \mapsto (x \mapsto e(m)(x))$$

ist korrekt definiert. Für $m', m'' \in M$ und $x\in\mathcal{G}(M)$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(m'+m'')(x) &= e(m'+m'')(x) && \text{(Definition von } \varphi)\\ &= (e(m')\bullet e(m''))(x) && \text{(Definition der Multiplikation in } k[M])\\ &= e(m')(x)\bullet e(m'')(x) && \text{(Definition der Multiplikation in } k[\mathcal{G}(M)])\\ &= \varphi(m')(x)\bullet\varphi(m'')(x) && \text{(Definition von } \varphi)\\ &= (\varphi(m')+\varphi(m''))(x). && \text{(Definition der Addition in } \mathbf{X}^*(\mathcal{G}(M)))\end{aligned}$$

Da dies für beliebige $x\in\mathcal{G}(M)$ gilt, folgt

$$\varphi(m'+m'') = \varphi(m')+\varphi(m''),$$

d.h. φ ist ein Gruppen-Homomorphismus. Da die $e(m)$ mit $m\in M$ eine k-Vektorraumbasis von $k[\mathcal{G}(M)] = k[M]$ bilden und die Charaktere von $\mathcal{G}(M)$ in $k[\mathcal{G}(M)]$ liegen und k-linear unabhängig sind, ist jeder Charakter von $\mathcal{G}(M)$ von der Gestalt $e(m)$, d.h. φ ist surjektiv.

Wir haben noch zu zeigen, φ ist injektiv. Dazu reicht es zu zeigen, daß die Zusammensetzung von φ mit der natürlichen Einbettung

$$\mathbf{X}^*(\mathcal{G}(M)) \hookrightarrow k[\mathcal{G}(M)] = k[M]$$

der Charaktergruppe in den Koordinatenring injektiv ist. Diese Zusammensetzung

$$M \longrightarrow k[M],\ m \mapsto e(m),$$

bildet M bijektiv auf eine k-Vektorraumbasis von k[M] ab, ist also insbesondere injektiv.

Zu (iii). Nach SS21.5,14.2.3(ii) bzw. 3.2.3 (ii) sind die (rationalen) Charaktere von G Elemente des Koordinatenrings von G. Die natürliche Einbettung

$$M := \mathbf{X}^*(G) \hookrightarrow k[G],\ \chi \mapsto \chi, \tag{3}$$

der Charaktergruppe von G in den Koordinatenring von G läßt sich deshalb zu einer k-linearen Abbildung

$$k[M] \longrightarrow k[G],\ e(\chi) \mapsto \chi,$$

auf die Gruppen-Algebra von M fortsetzen. Diese Abbildung überführt eine k-Vektorraumbasis (nämlich die Erzeuger $e(\chi)$ der Gruppen-Algebra von M) in eine k-Vektorraumbasis des Koordinatenrings von G, und ist deshalb bijektiv. Die Addition der Elemente von $M := \mathbf{X}^*(G)$ entspricht der Multiplikation der Charaktere als Elemente von k[G]. Deshalb ist diese Abbildung ein k-Algebra-Isomorphismus.
Nach (i) steht links gerade der Koordinatenring der linearen algebraischen Gruppe $\mathcal{G}(M)$. Der Isomorphimus des Koordinatenrings dieser Gruppe mit dem Koordinatenring der Gruppe G induziert einen Isomorphismus affiner algebraischer Varietäten

$$\psi: G \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}(M),$$

welche lineare algebraische Gruppen sind. Wir haben noch zu zeigen,

ψ ist ein Gruppen-Homomorphismus.

Nach Konstruktion erhalten wir, wenn wir zu den Koordinatenringen übergehen und die induzierte Abbildung auf die Charaktergruppe von $\mathcal{G}(M)$ einschränken, einen Gruppen-Homomorphismus (nämlich nach (ii) gerade die natürliche Einbeittung (3)), d.h. es gilt

$$\psi^*(M) \subseteq \mathbf{X}^*(G),$$

und die Abbildung

$$\psi^*: M \longrightarrow \mathbf{X}^*(G),\ \chi \mapsto \chi\circ\psi,$$

ist ein Gruppen-Homomorphismus. Insbesondere ist

$$\chi\circ\psi: G \longrightarrow k^* \text{ ein Gruppen-Homomorphismus} \tag{4}$$

für jeden Charakter $\chi: \mathcal{G}(M) \longrightarrow k^*$.

Die Gruppen G und $\mathcal{G}(M)$ sind beide diagonaliserbar. Wir können uns beide Gruppen als abgeschlossene Untergruppen geeigneter allgemeiner linearer Gruppen vorstellen, die aus Diagonalmatrizen bestehen.

Die Abbildung ψ überführt deshalb gewisse Diagonalmatrizen, sagen wir

$$a = \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n) \text{ und } b = \mathrm{diag}(b_1,\dots,b_1)$$

in Diagonalmatrizen, sagen wir

$$\psi(a) = \mathrm{diag}(\psi_1(a),\dots,\psi_r(a)) \text{ und } \psi(b) = \mathrm{diag}(\psi_1(b),\dots,\psi_r(b)).$$

Bezeichne

$$\chi_i: \mathcal{G}(\mathbf{X}^*(G)) \longrightarrow k^*$$

den Charater, der jede Matrix von $\mathcal{G}(\mathbf{X}^*(G))$ auf den i-ten Eintrag auf der Hauptdiagonalen abbildet. Dann gilt

$$\chi_i(\psi(a)) = \psi_i\,(a)\ ,\ \chi_i(\psi(b)) = \psi_i\,(b)$$

und

$$\begin{aligned}\chi_i(\psi(ab)) &= (\chi_i\circ\psi)(ab)\\ &= (\chi_i\circ\psi)(a)\bullet(\chi_i\circ\psi(b)) && \text{(nach (4))}\\ &= \psi_i\,(a)\bullet\,\psi_i\,(b). && \text{(Definition von } \chi_i)\end{aligned}$$

Da dies für jedes i gilt, ist $\psi(ab)$ die Diagonalmatrix

$$\begin{aligned}\psi(ab) &= \mathrm{diag}(\psi_1(a)\bullet\,\psi_1(b),\dots,\,\psi_r(a)\bullet\,\psi_r(b))\\ &= \mathrm{diag}(\psi_1(a),\dots,\psi_r(a))\bullet\,\mathrm{diag}(\psi_1(b),\dots,\psi_r(b))\\ &= \psi(a)\bullet\psi(b).\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, daß ψ ein Gruppen-Homomorphismus ist.
QED.
Bemerkung
Aus dem Beweis von Aussage (iii) ergibt sich:
Eine reguläre Abbildung

$$\psi: G' \longrightarrow G''$$

von diagonalisierbaren linearen algebraischen Gruppen G' und G'' ist genau dann ein Homomorphismus von linearen algebraischen Gruppen, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Die induzierte Abbildung der Koordinatenringe

   $$\psi^*: k[G''] \longrightarrow k[G']$$

   bildet die Charaktergruppen ineinander ab,

   $$\psi^*(X^*(G'')) \subseteq X^*(G')$$

2. Die auf den Charaktergruppen induzierte Abbildung,

   $$\psi^*: X^*(G'') \longrightarrow X^*(G'),$$

   ist ein Gruppen-Homomorphismus.

Index

—A—

Algebra
    Gruppen-Algebra einer endlich erzeugten abelschen Gruppe, 1

—G—

Gruppen-Algebra einer endlich erzeugten abelschen Gruppe, 1

Inhalt

LINEARE ALGEBRAISCHE GRUPPEN 1

14 KOMMUTATIVE LINEARE ALGEBRAISCHE GRUPPEN 1

14.2 Diagonalisierbare Gruppen und Tori 1

14.2.5 Die Gruppen-Algebra einer endlich erzeugten abelschen Gruppe 1

14.2.6 Proposition: Rekonstruktion der diagonlisierbaren Gruppen aus deren Charaktergruppe 4

INDEX 8

INHALT 9